

MPRI 2-2 TD 1 du 16/1/2020

Thomas Ehrhard

1) (Utile pour la suite.) Soit $t \in \mathbf{Rel}(E, F)$.

1.1) Soient $(m_i, n_i) \in !t$ pour $i = 1, \dots, k$, montrer que $(m_1 + \dots + m_k, n_1 + \dots + n_k) \in !t$.

1.2) Soit $(m, n) \in !t$. Montrer que si $n_1, \dots, n_k \in !F$ sont tels que $n = n_1 + \dots + n_k$ alors il existe $m_1, \dots, m_k \in !E$ tels que $m = m_1 + \dots + m_k$ et $(m_i, n_i) \in !t$ pour $i = 1, \dots, k$.

Et de même si $(m, n) \in !t$ et si $m_1, \dots, m_k \in !E$ sont tels que $m = m_1 + \dots + m_k$ alors il existe $n_1, \dots, n_k \in !F$ tels que $n = n_1 + \dots + n_k$ et $(m_i, n_i) \in !t$ pour $i = 1, \dots, k$.

2) Dans \mathbf{Rel} prouver que le diagramme de naturalité de la déréliction commute:

$$\begin{array}{ccc} !E & \xrightarrow{\text{der}_E} & E \\ !t \downarrow & & \downarrow t \\ !F & \xrightarrow{\text{der}_F} & F \end{array}$$

Soit $m = [a_1, \dots, a_k] \in !E$ et $b \in F$, observer que si $(m, b) \in \text{der}_F !t$ alors il existe $n \in !F$ tel que $(m, n) \in !t$ et $(n, b) \in \text{der}_F$. Cette dernière condition signifie que $n = [b]$. Mais alors la définition de $!t$ implique que $k = 1$ et que $(a_1, b) \in t$. Donc $(m, a_1) \in \text{der}_E$ et par suite $(m, b) \in t \text{ der}_E$, on a prouvé que $\text{der}_F !t \subseteq t \text{ der}_E$.

Réciproquement on suppose que $(m, b) \in t \text{ der}_E$. Soit $a \in E$ tel que $(m, a) \in \text{der}_E$ et $(a, b) \in t$. Par définition de der_E on a $k = 1$ et $a_1 = a$. Soit $n = [b]$, on a $(m, n) \in !t$ et $(n, b) \in \text{der}_F$ et donc $(m, b) \in \text{der}_F !t$. On a prouvé que $t \text{ der}_E \subseteq \text{der}_F !t$.

3) De même pour la naturalité du digging.

$$\begin{array}{ccc} !E & \xrightarrow{\text{dig}_E} & !!E \\ !t \downarrow & & \downarrow !!t \\ !F & \xrightarrow{\text{dig}_F} & !!F \end{array}$$

Soit $m \in !E$ et $N \in !!F$.

Supposer d'abord que $(m, N) \in \text{dig}_F !t$. Soit $n \in !F$ tel que $(m, n) \in !t$ et $(n, N) \in \text{dig}_F$. On écrit $N = [n_1, \dots, n_k]$, alors on a $n = n_1 + \dots + n_k$. Par l'exercice 1 on peut écrire $m = m_1 + \dots + m_k$ avec $(m_i, n_i) \in !t$ pour $i = 1, \dots, k$. Soit $M = [m_1, \dots, m_k] \in !!E$, on a $(m, M) \in \text{dig}_E$ et $(M, N) \in !!t$, ce qui prouve que $\text{dig}_F !t \subseteq !!t \text{ dig}_E$.

Réciproquement on suppose $(m, N) \in !!t \text{ dig}_E$. Soit $M \in !!E$ tel que $(m, M) \in \text{dig}_E$ et $(M, N) \in !!t$. On peut écrire $M = [m_1, \dots, m_k]$ et $N = [n_1, \dots, n_k]$ avec $(m_i, n_i) \in !t$ pour $i = 1, \dots, k$. De plus comme $(m, M) \in \text{dig}_E$ on a $m_1 + \dots + m_k = m$. Soit $n = n_1 + \dots + n_k$, on a $(m, n) \in !t$ par l'exercice 1.

4) Prouver les deux commutations suivantes:

$$\begin{array}{ccccc} !E & \xleftarrow{\text{der}_{!E}} & !!E & \xrightarrow{\text{!der}_E} & !E \\ & \text{Id} \swarrow & \text{dig}_E \uparrow & \searrow \text{Id} & \\ & & !E & & \end{array}$$

5) Si $N = [n_1, \dots, n_k] \in !!F$, on pose $\Sigma(N) = n_1 + \dots + n_k \in !F$. Prouver la commutation

$$\begin{array}{ccc} !E & \xrightarrow{\text{dig}_E} & !!E \\ \text{dig}_E \downarrow & & \downarrow !\text{dig}_E \\ !!E & \xrightarrow{\text{dig}_{!E}} & !!!E \end{array}$$

Soit $m \in !E$ et $\mathcal{M} \in !!!E$.

On suppose d'abord $(m, \mathcal{M}) \in \text{dig}_{!E} \text{dig}_E$. Cela signifie que $\Sigma(\Sigma(\mathcal{M})) = m$ (noter que $\Sigma(\mathcal{M}) \in !!E$). On écrit $\mathcal{M} = [M_1, \dots, M_k]$. Soit $m_i = \Sigma(M_i) \in !E$ pour $i = 1, \dots, k$. Soit $M = [m_1, \dots, m_k]$. Comme $\sum_{i=1}^k m_i = \sum_{i=1}^k \Sigma(M_i) = \Sigma(\sum_{i=1}^k M_i) = m$, on a $(m, M) \in \text{dig}_E$. Par définition $(m_i, M_i) \in \text{dig}_E$ pour $i = 1, \dots, k$, donc $(M, \mathcal{M}) \in !\text{dig}_E$. Donc $\text{dig}_{!E} \text{dig}_E \subseteq !\text{dig}_E \text{dig}_E$.

Réciproquement on suppose $(m, \mathcal{M}) \in !\text{dig}_E \text{dig}_E$. Soit $M \in !!E$ tel que $(m, M) \in \text{dig}_E$ et $(M, \mathcal{M}) \in !\text{dig}_E$. Par l'exercice 1 on a $(\Sigma(M), \Sigma(\mathcal{M})) \in \text{dig}_E$ (détailler) c'est-à-dire $\Sigma(\Sigma(\mathcal{M})) = \Sigma(M) = m$, et donc $(m, \mathcal{M}) \in \text{dig}_{!E} \text{dig}_E$.

6) Pour éviter toute confusion, on utilise la notation suivante: si $s \in \mathbf{Rel}(E, F)$ et $u \in \mathcal{P}(E)$, on pose $s \cdot u = \{b \in F \mid \exists a \in E (a, b) \in s\}$ (c'est l'application *linéaire* de s à u). Si $u \in \mathcal{P}(E)$, on pose $u^{(!)} = \mathcal{M}_{\text{fin}}(u) \in \mathcal{P}(!E)$. On rappelle que $1 = \{*\}$.

6.1) Vérifier que $\text{der}_E \cdot u^{(!)} = u$, $\text{dig}_E \cdot u^{(!)} = u^{(!)(!)}$, $\mathbf{w}_E \cdot u^{(!)} = 1$, $\mathbf{c}_E \cdot u^{(!)} = u^{(!)} \otimes u^{(!)} = u^{(!)} \times u^{(!)} \in \mathcal{P}(!E \otimes !E)$ et $!s \cdot u^{(!)} = (s \cdot u)^{(!)}$ si $s \in \mathbf{Rel}(E, F)$.

Soit $s \in \mathbf{Rel}(!E, F)$. On définit une fonction

$$\begin{aligned} \widehat{s} : \mathcal{P}(E) &\rightarrow \mathcal{P}(F) \\ u &\mapsto \{b \in F \mid \exists m \in \mathcal{P}_{\text{fin}}(u) (m, b) \in s\} = s \cdot u^{(!)} \end{aligned}$$

6.2) Montrer que \widehat{s} est une fonction Scott-continue, c'est-à-dire qu'elle est croissante et que, pour toute partie filtrante D de $\mathcal{P}(E)$ (ce qui signifie que D est non vide et $\forall u_1, u_2 \in D \exists u \in D u_1 \cup u_2 \subseteq u$), on a $\widehat{s}(\bigcup D) = \bigcup_{u \in D} \widehat{s}(u)$.

6.3) Vérifier que $\widehat{\text{der}_E}$ est la fonction identité.

6.4) (Promotion et composition dans la catégorie de Kleisli.) Si $s \in \mathbf{Rel}(!E, F)$ on définit $s^! \in \mathbf{Rel}(!E, !F)$ comme la composition suivante de morphismes:

$$!E \xrightarrow{\text{dig}_E} !!E \xrightarrow{!s} !F$$

Si $u \in \mathcal{P}(E)$, vérifier que $s^! \cdot u^{(!)} = \widehat{s}(u)^{(!)}$.

Si $t \in \mathbf{Rel}(!F, G)$, on définit $t \circ s \in \mathbf{Rel}(!E, G)$ par

$$t \circ s = t s^! = t !s \text{ dig}_E .$$

Vérifier que $(m, c) \in t \circ s$ si et seulement si on peut trouver $k \in \mathbb{N}$ et $(m_i, b_i) \in s$ (pour $i = 1, \dots, k$) tels que $m = m_1 + \dots + m_k$ et $([b_1, \dots, b_k], c) \in t$.

6.5) (Promotion généralisée.) Plus généralement si $s \in \mathbf{Rel}(!E_1 \otimes \dots \otimes !E_n, F)$ on définit $s^! \in \mathbf{Rel}(!E_1 \otimes \dots \otimes !E_n, !F)$ comme la composition suivante de morphismes de \mathbf{Rel} (utilisant la structure lax-monoïdale du tenseur vue en cours):

$$!E_1 \otimes \dots \otimes !E_n \xrightarrow{\text{dig}_{E_1} \otimes \dots \otimes \text{dig}_{E_n}} !!E_1 \otimes \dots \otimes !!E_n \xrightarrow{\mu^n} !(E_1 \otimes \dots \otimes E_n) \xrightarrow{!s} !F$$

Décrire $s^!$. Noter que si $u_i \in \mathcal{P}(E_i)$ pour $i = 1, \dots, n$ alors $s^! \cdot (u_1^{(!)} \otimes \dots \otimes u_n^{(!)}) = (s \cdot (u_1^{(!)} \otimes \dots \otimes u_n^{(!)}))^{(!)}$.

6.6) Avec les notations de la question 6.4, montrer que $\widehat{t \circ s}(u) = \widehat{t}(\widehat{s}(u))$ pour tout $u \in \mathcal{P}(E)$.

6.7) Soit $s \in \mathbf{Rel}(!E, E)$ et $f = \widehat{s}$, soit $u_0 = \bigcup_{n=0}^{\infty} f^n(\emptyset)$. Montrer que $f(u_0) = u_0$ et que u_0 est le plus petit élément u de $\mathcal{P}(E)$ tel que $f(u) = u$ (u_0 est plus petit point fixe de f). On posera $\overline{\text{fix}}(s) = u_0$.

6.8) Montrer que u_0 est le plus petit pré-point fixe de f , c'est-à-dire le plus petit $u \in \mathcal{P}(E)$ tel que $f(u) \subseteq u$. Noter que cette propriété $f(u) \subseteq u$ peut se comprendre comme une propriété de "clôture par déduction" de u : si $a_1, \dots, a_k \in u$ et $([a_1, \dots, a_k], a) \in s$, alors $a \in u$.

On suppose maintenant que $E = (!(F \multimap F) \multimap F)$ pour un ensemble F . On définit $\mathcal{Z} \in \mathbf{Rel}(!E, E)$ par $\mathcal{Z} = \text{cur } \mathcal{Z}'$ où $\mathcal{Z}' \in \mathbf{Rel}(!E \otimes !(F \multimap F), F)$ est la composition suivante de morphismes de \mathbf{Rel} (en gardant les isos monoïdaux implicites):

$$\begin{array}{ccc} !E \otimes !(F \multimap F) & \xrightarrow{!E \otimes c_{!F \multimap F}} & !E \otimes !(F \multimap F) \otimes !(F \multimap F) & \xrightarrow{e \otimes \text{der}_{!F \multimap F}} & !F \otimes !(F \multimap F) \\ & & & & \downarrow \text{ev } \sigma \\ & & & & F \end{array}$$

où $e = h^!$ (promotion généralisée) avec $h = \text{ev}(\text{der}_E \otimes !(F \multimap F)) \in \mathbf{Rel}(!E \otimes !(F \multimap F), F)$.

6.9) Montrer que

$$\mathcal{Z} = \{([(m_1, a_1), \dots, (m_k, a_k)], (m_1 + \dots + m_k + [(a_1, \dots, a_k], a)], a) \mid k \in \mathbb{N}, m_1, \dots, m_k \in !(F \multimap F) \text{ et } a, a_1, \dots, a_k \in F\}$$

Il résulte de cette définition que si $Y_0 \in \mathcal{P}(E) = \mathbf{Rel}(!(F \multimap F), F)$ est un "candidat opérateur de pont fixe" alors $Y_1 = \widehat{\mathcal{Z}}(Y_0) \in \mathbf{Rel}(!(F \multimap F), F)$ vérifie que, pour tout $t \in \mathcal{P}(!(F \multimap F))$

$$\widehat{Y}_1(t) = \widehat{t}(\widehat{Y}_0(t)).$$

En effet

$$\begin{aligned} \widehat{Y}_1(t) &= Y_1 \cdot t^{(!)} \\ &= (\mathcal{Z} \cdot Y_0^{(!)}) \cdot t^{(!)} \\ &= \mathcal{Z}' \cdot (Y_0^{(!)} \otimes t^{(!)}) \\ &= (\text{ev } \sigma (e \otimes \text{der}_{!F \multimap F})) \cdot (Y_0^{(!)} \otimes t^{(!)} \otimes t^{(!)}) \\ &= (\text{ev } \sigma) \cdot ((Y_0 \cdot t^{(!)})^{(!)} \otimes t). \end{aligned}$$

6.10) Soit $\mathcal{Y} = \overline{\text{fix}}(\mathcal{Z}) \in \mathbf{Rel}(!(F \multimap F), F)$. C'est donc le plus petit élément Y de $\mathbf{Rel}(!(F \multimap F), F)$ tel que, si $(m_1, a_1), \dots, (m_k, a_k) \in Y$ et $a \in F$, alors $(m_1 + \dots + m_k + [(a_1, \dots, a_k], a)], a) \in Y$.

Soit $s \in \mathbf{Rel}(!F, F) = \mathcal{P}(!F \multimap F)$.

Soit $\Phi = \widehat{\mathcal{Z}}$, on pose $Y_n = \Phi^n(\emptyset)$. Montrer par récurrence sur n que $\widehat{Y}_n(s) = f^n(\emptyset)$ (où $f = \widehat{s}$) en utilisant 6.9. En déduire que $\widehat{\mathcal{Y}}(s) = \overline{\text{fix}}(s) = \bigcup_{n=0}^{\infty} f^n(\emptyset)$.