TD B: NP

DEA d'Algorithmique – Complexité

A préparer vers le 21/10/03

1. Le but de cet exercice est de caractériser les langages NP comme projections des relations P.
   Définition 1 On dit qu'une relation $R \subset \Sigma^* \times \Sigma^*$ est équilibrée (terme provisoire) si
   $$\exists k \forall x, y \quad (x, y) \in R \Rightarrow |y| < |x|^k$$
   Définition 2 - à compléter On dit qu'une relation $R \subset \Sigma^* \times \Sigma^*$ est de la classe P si ? ? ? ? ?.
   Théorème - à prouver L est dans NP si et seulement si il existe une relation binaire R équilibrée de la classe P telle que :
   $$x \in L \Leftrightarrow \exists y \quad (x, y) \in R$$
2. Montrez que 2SAT (satisfaisabilité de CNF avec 2 littéraux par clause) est dans P. *Indications : (1) c'est écrit partout ; (2) on peut utiliser la résolution ; (3) sinon on peut transformer les disjonctions en implications.*
3. Montrez que CLIQUE et STABLE sont NP-complets. *Indication : montrer leur équivalence à* TRANSVERSAL.
4. SAC-A-DOS : On a un ensemble fini des objets U. La valeur de chaque objet $u \in U$ est $v(u)$, sont poids est $p(u)$. On veut remplir le sac à dos en y mettant un sous-ensemble d'objets $S \subset U$ pour qu'il ne soit pas trop lourd : $\sum_{u \in S} p(u) \leq P$ mais d'une grande valeur : $\sum_{u \in S} v(u) \geq V$.
   Montrez que ce problème est NP-complet. *Indication : utilisez* PARTITION *ou* SAC-A-DOS-EXACT.
5. EVALUER-FAMILLE : On a une famille C de sous-ensembles d'un ensemble A et un entier J. Est-il possible d'obtenir tous les éléments de C à partir de singletons en utilisant l'opération $\cup$ (union) $\leq J$ fois.
   Montrer que ce problème est NP-complet.
   Idée de la réduction TRANSVERSAL$\preceq$ EVALUER-FAMILLE. On peut représenter chaque arête (u, v) du graphe par $\{a_0, u, v\} \in C$. Comment profiter dún petit ensemble transversal de sommets pour obtenir C en peu d'opérations ?