Automates avancés

Master 1 II et MI

Devoir surveillé du 20 mars 2007 (10h30-12h30)
documents autorisés : notes manuscrites; le barème est indicatif.

1 Application des cours $\boxed{6}$

1. $\boxed{1}$ Construisez un BDD pour $x \wedge (y \Leftrightarrow (z \vee u))$.
2. $\boxed{1}$ Construisez un automate déterministe qui trouve toutes les occurrences du contexte `ananas` dans chaque texte en alphabet latin.
3. $\boxed{2}$ Donnez une formule MSO définissant le langage $b(aaa)^*b$.
4. $\boxed{2}$ Démontrez que ce même langage ne peut pas être défini par une formule de premier ordre (en admettant les théorèmes sur les langages apériodiques énoncés en cours).

2 Exercices d'invention $\boxed{6}$

1. Trouvez le BDD pour la fonction booléenne $Majorite$ de n arguments. Par définition $Majorite(b_1, \ldots, b_n)$ est vraie si et seulement si plus d'une moitié de bits b_i valent 1 :
   (a) $\boxed{1}$ faites un dessin détaillé ;
   (b) $\boxed{1}$ expliquez pourquoi votre diagramme calcule la fonction souhaitée ;
   (c) $\boxed{1}$ expliquez pourquoi il est en forme canonique (minimale).
2. $\boxed{2}$ On considère la théorie de premier ordre avec la signature $(0, 1, +, =, P_2)$ et son modèle sur $\mathbb{N}$. L'interprétation de $0, 1, +, =$ est standard (comme dans l'arithmétique de Presburger). Le prédicat $P_2(x)$ est vrai si et seulement si x est une puissance de 2. Démontrez que cette théorie est décidable. *Indication: Inutile de recopier la preuve du cours, expliquez seulement comment l'étendre pour obtenir le résultat recherché.*
3. $\boxed{1}$ Même question pour la théorie de signature $(0, 1, +, =, P_7)$, où $P_7(x)$ est vrai si et seulement si x est une puissance de 7.

3 Un vrai théorème $\boxed{11}$

L'objectif de cet exercice consiste à démontrer le résultat suivant énoncé sans preuve en cours

Théorème 1 (McNaughton, Pappert) *Chaque langage défini par une formule close de premier ordre (signature $<$) est un langage sans étoile.*

1. $\boxed{0{,}5}$ Rappelez la définition d'un langage sans étoile.
2. $\boxed{0{,}5}$ Expliquez comment associer à chaque formule f de premier ordre (pas nécessairement close) un langage $S(f)$. Précisez dans quel alphabet.
3. $\boxed{1}$ On suggère de démontrer que $S(f)$ est sans étoile par induction structurelle sur f. Énoncez et démontrez le cas de base.
4. $\boxed{1}$ Énoncez le cas inductif.
5. $\boxed{1}$ Démontrez le cas inductif pour les opérations booléennes.
6. $\boxed{2}$ Démontrez le cas inductif pour la quantification existentielle en admettant le lemme suivant :

   Lemme 1 *Soit A et B deux alphabets disjoints. On dénote par K le langage A^*BA^* (il contient les mots avec une seule lettre de B). Soit L un langage sans étoile sur $A \cup B$ tel que $L \subset K$. Alors L est une union finie de langages de forme GbD où G et D sont des langages sans étoile sur A, et b une lettre dans B.*

7. $\boxed{1}$ Terminez la preuve du théorème 1 et expliquez pourquoi on considère toutes les formules, et pas seulement les formules closes.
8. $\boxed{4}$ Démontrez le lemme 1. *Indication: Prouvez par induction que pour chaque expression E sans étoile le langage $E \cap K$ admet une décomposition décrite dans le lemme.*