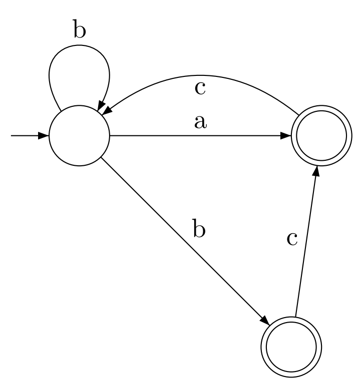
Automates avancés

Master 1 II et MI - 2ème session

Examen du 14 juin 2007 (12h30-15h30)
documents autorisés : notes manuscrites; le barème est indicatif.

1 Applications des cours

1. $\boxed{2}$ Vrai ou faux ? Justifiez vos réponses en donnant une preuve ou un contre-exemple.
   (a) Un langage fini de mots finis est toujours régulier.
   (b) Un langage fini de mots infinis est toujours régulier.
   (c) Un langage infini de mots finis est toujours non-régulier.
   (d) Un langage infini de mots infinis est toujours non-régulier.
2. $\boxed{1}$ Construire un automate qui reconnait le langage sur l'alphabet $\{a, b, c\}$ défini par la formule MSO :
   $$\exists X\Big(\forall n\big(X(n) \Rightarrow X(S(n))\big) \wedge \forall m\big(X(m) \Leftrightarrow (a(m) \vee b(m))\big)\Big)$$
   Indication: Essayez de comprendre le sens de la formule
3. $\boxed{2}$ Est-ce que le langage $(a(b+c))^*$ est sans étoile ? Justifiez.
4. $\boxed{2}$ Trouvez une expression ω-régulière pour le langage reconnu par l'automate de Büchi ci-dessous. *Indication: N'essayez pas de comprendre, appliquez la méthode systématique.*



2 Un BDD

Trouvez le BDD pour la fonction booléenne MMM de n arguments.
Par définition $MMM(b_1, \ldots, b_n)$ est vraie si et seulement si le vecteur booléen a la forme $(0, \ldots, 0, 1, \ldots, 1)$, c-à-d un certain nombre zéros suivis par un certain nombre de uns :

1. $\boxed{1}$ faites un dessin détaillé ;
2. $\boxed{1}$ expliquez pourquoi votre diagramme calcule la fonction souhaitée ;
3. $\boxed{1}$ expliquez pourquoi il est en forme canonique (minimale).

3 Résolution des congruences en utilisant les automates

Une congruence simple est

$$x \equiv a(mod\, b)$$

où x est une inconnue, a, b sont des entiers donnés. On cherche à résoudre les congruences, et les systèmes des congruences, c-à-d savoir si une solution existe, et dans ce cas représenter l'ensemble de toutes les solutions. On représentera un entier x par un mot 1^x (en système unaire donc). On représentera un ensemble d'entiers E par un langage $\{1^x \mid x \in E\}$.

1. $\boxed{1}$ Comment trouver un automate qui reconnait le langage de toutes les solutions d'une congruence $x \equiv a(mod\, b)$?
2. $\boxed{1}$ Comment trouver un automate qui reconnait le langage de toutes les solutions d'un système de plusieurs congruences $x \equiv a_i(mod\, b_i)$ (il y a une seule inconnue) ?
3. $\boxed{1}$ Appliquer votre algorithme au système

$$\begin{cases} x & \equiv & 1(mod\, 2) \\ x & \equiv & 2(mod\, 3) \end{cases}$$

Déduisez quel est l'ensemble de toutes les solutions de ce système.

4 Mots bi-infinis

L'opérateur ${}^{-\omega}$ est le symétrique de l'opérateur ${}^{\omega}$ et correspond au produit infini à gauche :

$$a^{-\omega} = \dots aaa$$

Soit $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, I, \Delta, F)$ un automate fini. Un chemin d'étiquette

$$u = \dots a_{-1}a_0a_1 \dots$$

est une suite bi-infinie d'états $(q_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ telle que : $\forall i, (q_i, a_i, q_{i+1}) \in \Delta$. Un chemin est *réussi* s'il existe une infinité de $i \leq 0$ tels que $q_i \in I$ et une infinité de $i \geq 0$ tels que $q_i \in F$.

Un mot bi-infini est *reconnu* par l'automate $\mathcal{A}$ s'il est étiquette d'un chemin réussi. On définit de façon immédiate l'ensemble des langages de mots bi-infinis *reconnaissables* sur un alphabet Σ.

1. $\boxed{1}$ Donner un automate sur l'alphabet $\{a, b\}$ qui reconnait l'ensemble des mots bi-infinis ayant un nombre fini de b.
2. $\boxed{1}$ L'ensemble des langages reconnaissables de mots bi-infinis est-il stable par union ? (vous devez justifiez votre réponse)
3. $\boxed{1}$ Même question pour l'intersection.
4. $\boxed{1}$ Même question pour le passage au complémentaire.
5. $\boxed{1}$ Définir (formellement) les expressions régulières bi-infinies (BRE).
6. $\boxed{2}$ Démontrer qu'un langage de mots bi-infinis est reconnaissable si et seulement si il peut être exprimé par une BRE.