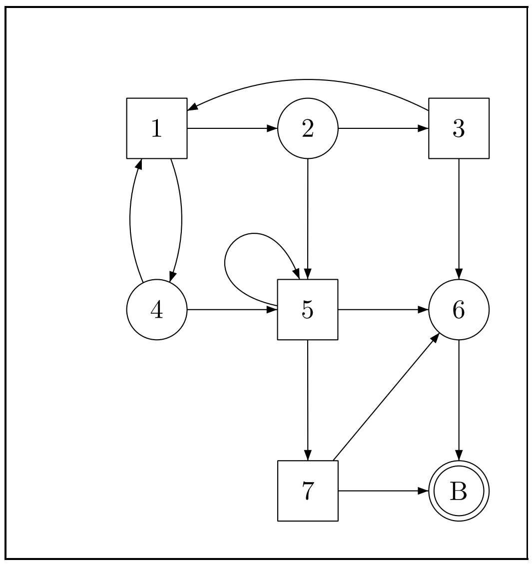
Automates avancés

Master 1 II et MI

Examen du 2 mai 2007 (12h30-15h30)
documents autorisés : notes manuscrites; le barème est indicatif.

1 Applications des cours

1.1 Jeux - $\boxed{3}$



On considère le jeu défini par le diagramme ci-dessus. Les états ronds appartiennent au joueur E, les états carrés au joueur A. L'objectif de E consiste à atteindre l'état B.

1. $\boxed{1}$ Trouver l'ensemble W_E de tous les états gagnants pour E.
2. $\boxed{1}$ Décrire une stratégie gagnante pour E à partir de tous les états W_E.
3. $\boxed{1}$ Décrire une stratégie gagnante pour A à partir de tous les autres états.

1.2 Mots infinis - $\boxed{4}$

On considère le langage L de tous les mots infinis sur $\{a, b\}$ qui contiennent un nombre infini de b sur des positions impaires.

1. $\boxed{1}$ Trouver une expression ω-régulière définissant L.
2. $\boxed{1}$ Trouver un automate de Büchi reconnaissant L.
3. $\boxed{2}$ Trouver une formule MSO définissant L.

2 Des petits raisonnement : Mots périodiques et leurs applications - $\boxed{5}$

Pour donner des exemples des langages non-ω-réguliers de mots infinis on peut utiliser des lemmes de pompage. Dans cette exercice on trouve une méthode similaire mais plus simple. N'oubliez pas de justifier vos assertions.

1. $\boxed{1}$ Démontrer que chaque langage ω-régulier non-vide contient un mot ultimement périodique (c-à-d de la forme uv^ω).
2. $\boxed{2}$ Donner une borne sur la taille de u et de v, en complétant l'énoncé et en démontrant le lemme suivant :

   Lemme 1 *Soit $\mathcal{A}$ un automate de Büchi avec n états acceptant au moins un mot infini. Alors il existe deux mots finis u et v, de taille inférieure à ..., tels que ...*
3. $\boxed{1}$ Donner un exemple de langage ω-régulier de mots infinis, qui ne peut être reconnu par aucun automate avec moins de 100 états.
4. $\boxed{1}$ Donner un exemple de langage non-ω-régulier de mots infinis

3 Une théorie décidable d'après Boigelot, Rassart et Wolper - $\boxed{12}$

L'objectif de cet exercice consiste à démontrer la décidabilité d'une théorie et trouver un algorithme de décision (un tel algorithme est appliqué pour la vérification de programmes). Il s'agit d'une théorie $\mathcal{T}$ de premier ordre avec la signature suivante :

$$\mathcal{S} = (0, 1, \leq, +, Z).$$

On l'interprète sur le domaine de réels $\mathbb{R}$. L' interprétation de $0, 1, \leq, +$ est usuelle. Le prédicat $Z(x)$ est vrai si et seulement si x est un entier. On souhaite pour chaque formule close décider si elle est vraie dans cette interprétation.

1. $\boxed{1}$ Décrire en termes usuels l'ensemble de $x \in \mathbb{R}$ satisfaisant la formule $exo(x)$ ci-dessous :

$$exo(x) \;=\; \exists y \exists z\, (y + y + y = 1 \wedge Z(z) \wedge x = y + z)$$

2. $\boxed{1}$ Proposer une méthode pour représenter un nombre réel par un mot infini. Un vecteur réel de dimension k par un mot infini. Un ensemble de vecteurs de dimension k par un langage de mots infinis. N'oubliez pas de préciser quels sont les alphabets utilisés.
3. $\boxed{1}$ Associer un langage $L(f)$ de mots infinis à chaque formule dans la signature $\mathcal{S}$.
4. $\boxed{1}$ Montrer que le langage $L(exo)$ associé à la formule $exo(x)$ introduite au début de ce problème est ω-régulier (en exhibant un automate de Büchi ou une expression ω-régulière).
5. $\boxed{1}$ Donner un plan de preuve par induction structurelle du lemme principal suivant :

   Lemme 2 *Pour toute formule f le langage $L(f)$ est ω-régulier.*
6. $\boxed{2}$ Démontrer le cas de base.
7. $\boxed{2}$ Démontrer le cas inductif.
8. $\boxed{1}$ Déduire la décidabilité de la théorie $\mathcal{T}$ et expliquer l' algorithme de décision.
9. $\boxed{2}$ Vous avez sans doute oublié que certains nombres réels admettent plus d'un développement en fraction décimale/ou binaire. Par exemple

$$\begin{array}{rcll} 2,5 & = & 2,4999999999999999999\ldots & \text{base } 10 \\ 10,1 & = & 10,0111111111111111111\ldots & \text{base } 2 \end{array}$$

   Comment corriger la preuve pour tenir compte de ce phénomène désagréable ?