Langages formels, calculabilité et complexité
TD13

9 janvier 2015

Exercise 1 3-SAT est NP-complet (*base*)

Une formule en forme normale conjonctive est une conjonction de clauses, et chaque clause est une disjonction de littéraux. On veut montrer que décider de la satisfiabilité d'une formule en CNF où chaque clause est une disjonction d'au plus 3 littéraux est NP-complet. Pour ce faire, on réduit SAT à ce problème.

1. Soient x, y et z trois littéraux. Exprimer les égalités $x = \neg y$, $x = (y \wedge z)$ et $x = (y \vee z)$ par des formules CNF avec au plus trois littéraux par clause.
2. En déduire une réduction de SAT à 3-SAT. On pourra considérer l'arbre syntaxique d'une formule et associer une nouvelle variable à chaque sommet interne.

Exercise 2 Forme normale disjonctive (*base*)

Une formule booléenne est en forme normale disjonctive (DNF) si elle est une disjonction de clauses et chaque clause est une conjonction de littéraux. Le problème DNFSat est le suivant :
INSTANCE : une formule booléenne $\phi \in$ DNF.
QUESTION : Est-ce que ϕ est satisfiable ?

1. Montrer que DNFSat $\in P$.
2. Il est bien connu que, pour toute formule booléenne ϕ, on peut construire une formule booléenne ϕ dans DNF qui est équivalente à ϕ. Pourquoi ce fait avec (1) n'implique pas que SAT est dans P ?

Pour tout entier naturel fixé k, on définit SAT_k de la manière suivante :
INSTANCE : une formule booléenne ϕ en CNF avec k clauses.
QUESTION : Est-ce que ϕ est satisfiable ?

3. Montrer que $\text{SAT}_k \in P$.
4. Considérer l'algorithme suivant pour 3-SAT : sur l'entrée ϕ, compter le nombre de clauses k de ϕ, utiliser ensuite l'algorithme en temps polynomial pour SAT_k qu'on a conçu à la question précédente. Pourquoi il n'implique pas que 3-SAT est dans P ?

Exercise 3 Emploi du temps (*base*)

On admet pour l'instant que le problème de coloriage de sommets est NP-complet. Le problème suivant, EmploiDuTemps, intervient lors de la préparation du concours d'entrée à l'École.
INSTANCE : Un ensemble P d'examens, un ensemble S de créneaux, un ensemble $C = \{c_1, \ldots, c_k\}$ de candidats et pour chaque candidat c_i, un ensemble $P_i \subseteq P$ d'examens qu'il doit passer.
QUESTION : Existe-t-il une attribution des examens à des créneaux qui évite des collisions ? (Une collision apparaît quand un candidat doit passer deux examens en même temps.)

Trouver une réduction entre Coloriage et EmploiDuTemps pour montrer que ce dernier problème est NP-complet.

Exercise 4 Théorème d'Immermann-Szelepcsényi (*avancé*)

On admet que le problème de l'accessibilité dans un graphe orienté (ACCESSIBILITÉ) est NL-complet.

Le théorème d'Immermann-Szelepcsényi affirme que NL=coNL.

1. Étant donné un graphe G et un sommet x, on suppose que l'on connaît r_i le nombre de sommets atteignables en au plus i étapes à partir d'un sommet spécifique s. Donner alors un algorithme non déterministe qui accepte en espace logarithmique le couple (t,i) si le sommet t n'est pas atteignable en au plus i étapes à partir de s.
2. Donner un algorithme qui calcule r_{i+1} en fonction de r_i en espace logarithmique.
3. En déduire que le problème ACCESSIBILITÉ est co-NL.
4. En déduire que NL=coNL.

Exercise 5 Coloriage (*avancé*)

Le problème de Coloriage est le suivant :
INSTANCE : un graphe non-orienté $G=(V,E)$, et un entier positif k,
QUESTION : Est-il possible de colorier les sommets de G avec au plus k couleurs différentes de telle manière que les sommets de toutes arêtes aient des couleurs différentes ?

Considérer la réduction suivante des instances de SAT vers les instances de Coloriage. Soit ϕ une formule arbitraire en CNF, avec les variables $x_1,x_2,\ldots,x_n$ et les clauses $C_1,C_2,\ldots,C_r$. Étant donné ϕ, construire un graphe $G=(V,E)$ avec

$$
\begin{aligned}
V &= \{v_0,\ldots,v_n\}\cup\{x_1,\ldots,x_n\}\cup\{\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n\}\cup\{C_1,\ldots,C_r\}\ ;\\
E &= \{\{v_i,x_j\},\{v_i,\bar{x}_j\}\mid 1\le i,j\le n \text{ et } i\neq j\}\\
&\cup\ \{\{v_i,v_j\}\mid 0\le i<j\le n\}\\
&\cup\ \{\{v_0,C_k\}\mid 1\le k\le r\}\\
&\cup\ \{\{x_i,\bar{x}_i\}\mid 1\le i\le n\}\\
&\cup\ \{\{x_i,C_k\}\mid x_i \text{ n'est pas un littéral de } C_k\}\\
&\cup\ \{\{\bar{x}_i,C_k\}\mid \neg x_i \text{ n'est pas un littéral de } C_k\}.
\end{aligned}
$$

1. Dessiner le graphe G pour la formule $\phi=(\bar{x}_1\vee x_2)\wedge(x_1\vee x_3)\wedge(x_1\vee\bar{x}_2\vee\bar{x}_3)$.
2. Montrer que la réduction précédente s'exécute en temps polynomial de SAT vers Coloriage.
3. En déduire que Coloriage est NP-complet.